REDUCCION

DEL CASO IRREDUCIBLE

DE

CARDANO.

HALLADA Y DEMOSTRADA ANALÍTICA Y SINTÉTICAMENTE; EN LATIN, CASTELLANO, TOSCANO, FRANCÉS, É INGLÈS.

Dedicada á la Reyna del Cielo María Santísima Madre de Dios y Señora Nuestra.

Por su ínfimo esclavo,

Joaquin Cáceres y Arias.

SALAMANCA.
IMPRENTA DE JUAN JOSÉ MORAN:
1815.

5.

O Iane a tergo quem nulla ciconía pinsit !

Pers. Sat. 1.a

T

Signum radicis gnomonicæ.
Signo de la raiz gnomonica.
Segno della radice gnomonica.
Signe de la racine gnomonique.
Sign of the root gnomonical.

GALEATUS PROLOGUS.

Duplicem veniam expecto á benevolo lectore: hoc est:

Primum in parte litteraria.

1. Flagito ut ignoscantur omnes barbarismi solœcismique, quia alias elegantias linguarum hic non habere locum, nemo est qui non videat, cum argumentum tantum sit susceptibile simplicioris gressionis, cujus nucleus sistit in XII tabulis in calce opusculi, algebraico sermone omnium gentium comuni, (ut sermo musicus) ubi frustra barbarismi solœcismisque quaerentur.

Secundo in parte scientifica:

2. Omnia indulgenda sunt: sed mihi erat cordi ultra Cardanun non progredi. Nugas agit algebra ista dicens omnes radíces esse imaginarias, quando in rerum natura reales sunt: quidquid attamen sit V. tab I atque XI.

3. Cum valor illius M et N hypotheticus sit, nempe secundum hypothesin 2, aut 3, sequitur in tab. XI hoc signum $\pm$ etiam hypotheticum esse: ideoque in tab. XI col. horiz. I minime continet duos valores ipsius x, nec columnæ II et III quatuor; sed singulæ singulos: sunt $2+4=6$ valores, qui in resolutione æquationum tertii gradus, ad tres reducuntur propter signa duplicia. $\pm$

4. «Eorum vero parallelogramorum quæ circa eamdem «diametrum consistunt quodlibet unum cum supplementis «duobus gnomo nominatur» (Euclides.)

5. Sed variæ sunt gnomonis acceptiones á multiplicatione dependentes, videlicet.

I. Horologii sciotherici stylus (Facciolati) (sed et in hoc horologio multa, nondum excogitata suppeditat imaginatio mea: scilicet horologium CATOPTRICUM, quod perpulcrum, ac perutile fieri potest: perpulcrum, invertendo in crystallo horologium comune: construendo cylindrum crystallinum axi terrae paralellum : punctis luminosis multies reflexis et refractis : Perutile , gnomo speculum , conus , cylindrum, sphaera, etc : parabola , hyperbola , cicloidis, brachistocrona , etc : cubus , tetraedrum , ycosaedrum, dodecaedrum , etc : multa specula lucem per singulas horas vel constantem, vel variabilem habentia, etc : die ac noctu , speculo posito positione Lunæ, planetarum , vel stellarum, etc: angulo reflexionis, et refractionis in aqua, vel crystallo , etc : cujus utilitas magna ad asignandas minutias temporis, quia lux reflexa ingenti distantia speculatur: etc : ad planos topographicos construendos, adeo ut construi potuerit horologium solare catropticum in monte Franciæ , speculatum à cuncta Provincia Salmanticensi, ideoque utilis ad latitudines , atque longitudines , nam cum mons Franciæ speculetur è Salmantica Mirobrigaque, sciri poterit quandó sol sistit in meridiano alterìus. Denìque fabricari potuisset horologium mixtum, hoc est, catoptrico–dioptricum: hoc est Domus nùmquam illuminata á sole nihilominus catoptricum habens: etc , etc , etc.)

II. Paralellograma , addito gnomone , minime tunc alteratur. (Aristoteles in prædicamentis.)

III. Quadratum quadrato circa diametrum deficiente: figura a^2+ab.

IV. Quadratum supplemento deficiente: fig: a^2+ab+b^2, quod in MINIMO est verus gnomo, tribus quadratibus constans cum sit $a=b$: in MAXIMO est quadratum cum sit a aut $b=o$.

V. Hic vero accipitur amplissimo sensu $A^2—B$: A, coefficiens ipsius x^{n-1}: B coeficiens illius x^{n-2} in omni æquatione: figura omnibus quadratis singulisque supplementis composita: figuraque elementum omnium termino–

rum cunctarum æquationum, si unica radix in æquatione transformata omnibus aliis æquetur; sin minus $m-n=$ aliis, facilior est resolutio.

6. Radixgnomonica quantitatis negativæ non est imaginaria.

7. Quando radix quadrata extrahi nequit, ibi nec radix gnomonica.

8. Radix gnomonica quadrati est eadem ac radix cuadrata.

9. Radix gnomonica quadrata es quadratum.

10. Radix gnomonica ad n elevata est potentia n.

11. Quadratum radicis gnomonicæ differt á quantitate illa, ex qua extrahitur tantum uno supplemento.

12. Sicut in lineis curvis quibus dy est æqualis dx, aut analoga, aut quamdam legem sequitur, ita in radicibus gnomonicis.

13. Ergo radix gnomonica est quantitas constans limes quantitatum variabilium.

14. In radicibus gnomonicis si dy est positiva; dx est negativa, aut vice versa, sicut in círculo á centro.

15. Itaque $\frac{y-dy}{x+dx}-\frac{y}{x}=0$, cujus integralis est $d(xy)=o$.

16. Itaque ejus specimen potest esse $\frac{21-1}{19+1}-\frac{20}{20}=0$.

17. In centro quadrati ibi est MINIMUM figura gnomonicæ sicut in quadrato MAXIMUM.

18. Denique animadvertitur analogia inter istas formulas

$$\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\,;\ \pm\frac{\sqrt{M+\frac{N}{\text{⅂}M}} \pm \sqrt{M-\frac{3M}{\text{⅂}M}}}{2}$$

19. Radix gnomonica fractionis est radix gnomonica numeratoris divisa per radicem quadratam denominatoris sed tunc venient irrationales columnæ 1, 2, 3, tab. XI:

parva præstantia, quamtumdis melíor sit irrationalitas, quam imaginarium: nihilominus problema est vere resolutum in tab. IX.

20. Ad levandam irrationalitatem (quæ nec etiam debet existere) fiat $3\urcorner(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(-2a+b+c)\sqrt{3}$ atque tunc $\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}=\frac{-2a+b+c}{3}$ quod fieri potest, immo fit, propter irrationalitatem, quæ quantitas est radix gnomonica illius $\frac{A^2-3B}{3}$: subtitutisque valoribus, nempe $A=a+b+c$, $B=ab+ac+bc$, $U=abc$ atque $\urcorner\frac{A^2-3B}{3}=\frac{-2a+b+c}{3}$ in columna 1 tab. XI, hæc columna erit a primus máximusque valor radicum æquationis.

21. Simili argumento considerando, $\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}$ esse ultimam solutionem æquationis quadraticæ, venient columnæ horizontales tab XI, 2, et 3, $=b$, c: ergo resoluta est æquatio, absque imaginaria, reductusque casus irreducibilis.

22. Sed progrediendo, in omni æquatione gradus n, si in transformata absque secundo término, proveniat única radix æqualis omnibus aliis (quin minus facilior est resolutio) dabitur hæc series resolutionum trasformatæ.

Primus gradus.

$x=\frac{\sqrt{M\urcorner^{-1}M\pm N}}{|\;\urcorner^{-1}M}$ quia non habet transformatam

Secunndus gradus..

$x=\frac{\sqrt{M\urcorner^{0}M\pm N}}{|\;\urcorner^{0}M}$ quia $\urcorner^0M=1$, M coef $x^1=o$, N coef x^0,

Tertius gradus.

$$x=\sqrt{\frac{M\,{}^{r}\urcorner M \pm N}{\urcorner M}}$$ ut videre est in tab. IX,

Quartus gradus.

$$x=\sqrt{\frac{M\,{}^{r}\urcorner^{2}M - N\,{}^{r}\urcorner M + P}{\urcorner^{2}M}}$$ ubi deest coef x^3;

M coef x^2; N coef x^1; P coef. x^0; ut multies supputavi, Ergo ab illatione; in omni æquatione gradus n.

$$x=\sqrt{\frac{B\,{}^{r}\urcorner^{n-2}B - C\,{}^{r}\urcorner^{n-3}B + D\,{}^{r}\urcorner^{n-4}B \ldots \pm U}{\urcorner^{n-2}B.}}$$

U coeficiens x^0, sive ultimi termini trasformatæ, et reliqui secundum eamdem legem: : sed nondum feci supputationem: ergo resolutæ sunt omnes æquationes.

23. Sicut in differentialibus, atque in radicalibus tres sunt quidditates, quas distinguere debemus, scilicet in diff d^2x, dx^2, $(dx)^2$: in radicalibus $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2}$, $(\sqrt{a})^2$, tres etiam quidditates exístunt in gnomonicis nempe: ${}^{2r}\urcorner a$, radix gnomonica secundi gradus illius a: ${}^{r}\urcorner a^2$ radix gnomonica illius a^2; $({}^{r}\urcorner a)^2$ quadratum radicis gnomonicæ istius a; ita ut tribus indicibus, aut exponentibus opus sit videlicet ${}^{m r}\urcorner^{n} a^{r}$; sed si nihil indícatur, intelligitur radix gnomonica secundi gradus, tamquam in radicalibus.

24. Veruntamen in resolutione Cardanica duo radices apparent affectæ $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; primum duplex signum $\pm$ est hypotheticum indiferens, dubium constans, atque exclusivum; secundum signum duplex $\pm$ est esentiale, necesarium, certum, variabile, atque simultaneum. Si prima

radix est positiva, signum superior, scilicet positivum, duabus aliis accomodatur; quin minus inferior: quod multa significat, primum, non affectam positivam esse *maximum*; secundum, unamquamque formulam adaptabilem esse unicuique radici; tertium, $\sqrt{-3}$ non esse absurdum, sed quadratura círculi: nempe $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ ubi 1 est radius, $\sqrt{-3}$ cosinus; illud 4 quatuor latera quadrati 1. limes unitas, signum secumdum $\pm$ dextrorsum aut sinistrorum centri, signum $\pm$ primum Zenith, aut Nadir curvæ, non est absurdum quia æque absurdum esset si foret $\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ dum cosinus radium superat.

25. Si suspicari non potest quid sit $\sqrt{-3}$, ita modo nec suspicatur quid sit $\sqrt{2}$ aut $\sqrt{3}$, igitur faciamus $1 \pm \sqrt{-3} = 0$, erit $1 = \sqrt{-3}$, quadrando $1 = -3$, unitate addita $+2 = -2$, hoc significat abstrahi debere à signis.

26. Omia absque absurdo hinc imaginari posunt nempe A=B (infinitum! non me latet infinita expulsa esse à modernis scriptoribus, sed.

Est modus in rebus sunt certi denique fines.

Quibus ultra citraque nequit consistere rectum.

Hoc est: absurdum ex utraque parte, in infinito positivo aut negativo, in inscripto aut circumscripto secundum quamlibet legem, quævis formula algebrica, aut figura geometrica, aut quantitas, aut etiam qualitas, atque etiam quidditas, assignata, in cero vel cyphra ibi est resolutio problematis.)

27. Hoc posito $1 = 6$, illud 6 potest esse unitas sex partibus divisa nempe 6°: Atque $6 = 0$, illud 6 potest, esse secundus terminus deficiens in æquatione transformata, id est $+3 = -3$, abstrahendo à signis.

28. Quantumvis in resolutione omnium æquationum nihil aliud præter radicem gnomonicam secundi gradus necesse sit, quia radices æquationum sunt ordinatæ circuli, lineæ mediales, radices quadratæ. (excussae, estampadas, stampate, estampèes, stamped, vox nec bar-

bara, nec latina, nec hispana, nec italica, nec gallica, nec anglica, sed inventa in quadratura circuli pro $\frac{x}{y}$ aut $\frac{y}{x}$, visa melior quam inscripta, in semicirculo) Attamen hæc doctrina parum adhuc est exculta; utique est susceptibilis majoris culturæ.

REDUCTIO IRREDUCIBILIS CASUS.

§ 1.

PROLOGOMEMA.

Sit proposita æquatio (A)...... $x^3 - Ax^2 + Bx - U = 0$.
Ex ea nascitur alia absque secundo termino nempe.

(B)...... $x^3 - Mx \pm N = 0$

Tab. 1 continet analysin æquationis. (B)

Columna verticalis * indicat æquationis (B) radices in omnibus combinationibus ejus: columnæ verticales M et N sunt coefficientes æquationis. (B)

Columna 4 horizontalis est ipsa æquatio (B) dum $(a+b)$ est unitas divisa in quibuscumque partibus: columnas 5 *et* 6 horizontales esse alias unitatis divisiones, facile cognoscitur.

Columna 7 horizontalis denotat semper coefficientem M esse semissem quadratorum radicum æquationis (B) abstrahendo a signis.

Denique columnæ 8 et 9 indicant illud M habere figuram similem gnomoni igitur necesse est extrahere radicen gnomonicam illius M.

Radix gnomonica illius M, aut ipsius (a^2+ab+b^2) est eadem ac radix quadrata $(a+b)^2$, et quando aliqua ex variabilibus est functio nihil, vel cero, illud $M=o$, sed gnomonica radix

est æqualis radici quadratæ, ea de causa indicata est in tab. VII, et VIII romanis arithmeticis notis.

Si radix gnomonica extrahi nequit, indicatur tantum, ut fit in radicibus quadratis, atque ejus signum potest esse ˥.

§ 2.

DE EXTRACTIONE RADICIS GNOMONICÆ LITTERALIUM QUANTITATUM.

In omni æquatióné tertii gradus dum secundus terminus deest; si foret. (existit a ttamen abstrahendo a signis) ejus semis est radix æquationis (B)

Igitur in tab. II, III, IV, inveniuntur exempla extractionis radicum gnomonicarum, quæ primo adspectu apparent.

Tab II exempla litteralia applicata ad números.

In tab. III signum * demonstrat primum residum. Sigum * * demoustrat divisorem: denique siguum * * * indicat residuum secundum.

Tandem in tab. IV sunt alia exempla ubi illud *a*, atque illud *b* elevata sunt ad potentias.

§ 3.

DE EXTRACTIONE RADICIS GNOMONICÆ NUMERORUM, SIVE NOTARUM ARITHMETICARUM.

Quia in quantitatíbus, expresis notis arithmeticis. omnia conglomerata sunt, nempe et radices, et producta, propter hanc conglomerationem, recurrendeam est ad serierum evolutionem, ubi in notione differentiarum inveniantur leges ipsarum differentiarum tab. V. prima differentiarum. Columna horizontalis, signata, * indícat legem generalem seriei, immo ipsa series.

Columna signata * * demonstrat differentias primas.

Col. hor. sig. * * * donotat differentias secundas.

Col. hor. sig. * * * *, den. dif tertias.

Col. hor. sig. * * * * *, den. dif. quartas.

et. c.

Et sic deinceps in sequentibus tabulis.

Tab. VI. est secunda differentiarum; oritur ex anteriori tabella cum faciamus $a=1$, $x=o$: demonstrat etiam antepenultimas differentias esse arithmeticam progressionem, penultimas æquales, ultima vero, $=o$.

Cætera signa sicut in anteriori tabella.

Tab. VII. est tertia differentiarum applicata ad arithmeticam notam 676 a et b, atque $(a+b)$ sunt radices æquationis (B) abstrahendo a signis; columnæ verticales manifeste indicant valores et variabilium a et b, et constantis. $(a+b)$

Asterisci sicut in præc tab. M primum coefficiens æquationis (B), ejus columna verticalis variabilis valor illius M.

Tab. VIII. est quarta differentiarum: omnia sicut in præced. tab. ad notam 2401.

§ 4.

RESOLUTIO.

Sit æquatio (B) . . . . $x^3-556x-3120=0$: extrahe radicem quadratam 556: animadvertitur prima facie notis 23, 24, 25 non satisfieri tabulæ II, utique satisfacit 26, quæ nota etiam satisfacit tabulæ VII in columna horizontali $20+6$, atque satisfaciens simul et æquationi, hæ sunt veræ radices æquationis, abstrahendo a signis.

Enimvero cum et discriminari debeat coefficiens N æquationis (B) manifestum est ipsasmet radices æquationis (B) esse in tab. IX, atque tractas ad præsentes notas, esse $M=556$, $N=3120$ unde oritur tab. X.

Atque contractas ad primam æquationem nempe (A), ejus radices espressæ sunt in tab. XI.

Denique tamdem in æquatione.

$$(A) \ldots . x^3-6x^2+11x-6=o.$$

erit $A=6$, $B=11$, $U=6$ itaque substituendo hosce valores in tab. XI, nascetur tabula XII, ubi nec etiam necesse est extrahere radicem gnomonicam cum sit in presenti æquatione $9AB-2A^3-27U=o$.

Si extractio radicis quadratæ est operatio geometrica, simili modo et extractio radicis gnomonicæ est utique operatio geo-

metrica. Ergo irreducibilis casus tractus est ad reductionem. Ergo (prolog. 21) PANDITUR INTEREA GRESSIO AD RESOLVENDAS OMNES ÆQUATIONES. (Prolog. 22.)

§ 5.

SINTHETICA RESOLUTIO.

A numero 8 tab. I eruitur hæc æquatio $(a+b)^2-M-ab=o$: ubi.

$(a+b)$ constans.

M constans.

$a\ b$ variabilis.

Ergo.

$d\ (a+b)=o$, $d\ M=o$,

$d\ (ab)=\dfrac{a-da}{b+db}-\dfrac{a}{b}$, (prolog. N.° 15.)

Ergo a quadratura circuli pendet, similiter que resolvenda est.

Atque ita cum omnes radices æquationum omnium gradum, sint ordinatæ circuli, sequitur, et omnes esse radices quadratas, quapropter in tab. IX, X, XI, XII nihil præter radices quadratæ invenitur, neque invenientur in resolutione æquationum, nisi iterum ad irreducibile reddeamus.

REDUCCION DEL CASO IRREDUCIBLE.

§ I.

PRELIMINARES.

Sea propuesta la equacion (A) . . . $x^3-Ax^2+Bv-U=o$ sea la transformada sin segundo término ,

$$(B)\ldots\ldots x^3-Mx\pm N=0$$

La tab. I presenta el ánalisis de la equacion (B). La columna vertical * indica las raices de la equacion en sus diversas combinaciones. Las columnas verticales M, N, son los coeficientes de la equacion (B), una y otras no pasan de las columnas horizontales 2, y 3.

La columna 4 horizontal es la equacion (B) cuando $(a+b)$ representa la unidad dividida en n partes Las columnas 5, y 6, horizontales son tambien diversas divisiones de la unidad.

La columna 7 horizontal denota que siempre el coeficiente M es igual á la mitad de la suma de los cuadrados de las raices (abstrayendo de los signos.)

Finalmente las columnas horizontales 8, y 9, denotan que M tiene la figura geometrica de un gnomon en su minimum, en lo demas la llamare gnomonica: es pues preciso extraer la raiz GNOMONICA de M.

La raiz gnomonica de de M, ó de a^2+ab+b^2 es la misma que la raiz cuadrada de $(a+b)^2$, y cuando una de las variables a, b, es funcion de cero N$=$0, y la raiz gnomonica de M es igual á la raiz cuadrada: por esta razon en las tab. VII y VIII se ha indícado con nümeros romanos.

Cuando no se puede extraer la raiz gnomonica, se indica, como sucede con la raiz cuadrada y su signo será ⌉.

§ II.

EXTRAER LA RAIZ GNOMONICA DE LAS CUANTIDADES LITERALES.

En una equacion de tercer grado en que falta el segundo término, si lo hubiera, su mitad (abstrayendo de los signos) seria raiz de la equacion.

Pero este segundo término, reducido á cero, existe realmente abstrayendo de los signos.

Supuesto lo cual, las tab. II, III, IV, son ejemplos, de la estraccion de las raices gnomonicas, que ya se descubren á primera vista. Tab. II. (1)

Demostraremos en este primer ejemplo las reglas, sacando

(1) Don Juan Justo Garcia ed. de Madrid 1782 y pág. 61 y Salamanca 1794 pág. 76, palabra por palabra de la de Madrid.

la raíz de a^2+ab+b^2, que puede representar todo (gnomon), como digimos ya. En efecto si el primer término a^2 es el cuadrado de la primera parte, se tendrá esta estrayendo la raiz cuadrada de dicho primer término, que es a, pongámosla á parte, y restemos despues su cuadrado a^2 de la cantidad para echar fuera de ella al primer término.

Pues que el segundo término que queda ab es el producto de la primera parte hallada multiplicada por la segunda, encontraremos esta, diviéndola por la primera a, y en efecto resulta de cociente b · luego restando el producto de ab, y el cuadrado b^2 de b, que son el segundo y tercer término que han de haber quedado en la cantidad si verdaderamente es figura gnomonica, habremos concluido la operacion: porque resulta cero; y será $a+b$ la raiz (gnomonica) que se busca.

T. III, * es el primer resto, * * es el divisor, * * * es el segundo resto.

§ III.

EXTRAER LA RAIZ GNOMONICA DE LAS CUANTIDADES NUMERICAS.

Como las potencias y los productos de las raices estan reunidos, es preciso recurrir á las series, cuyas diferencias sean constantes, y cuyo andamiento es conocido.

La tabla V es la primera de las diferencias, * denota las series, ** denota las primeras diferencias *** denota las segundas, **** las terceras ***** las cuartas &.ª.

La tabla VI es la segunda de las diferencias esta tabla proviene de la primera es decir de la V habiendo hecho en ella $a=1$, $x=0$ y patentiza las antepenultimas diferencias en progresion aritmética, las penultimas iguales, y las últimas$=0$. Los asteriscos como en la anterior.

La tab. VII es la tercera de las diferencias aplicada al número 676, a, b, $a+b$, son las raices de la equacion (B) prescindiendo de los signos, los astericos como en las tablas precedentes es decir, * primeras diferencias, * * segundas * * * terceras, M el coeficiente segundo de la equacion (B) ó sea el coeficiente de x.

La tabla VIII es la cuarta de las diferencias aplicada al número 2401. Cuando a, ó b, es igual á cero, entonces la raiz

gnomonica es la misma que la raiz cuadrada, y N=0, por lo que están en caracteres romanos.

§ IV.

RESOLUCION.

Sea la equacion (B).... $x^3—556x—3120$. Extrayendo la raiz cuadrada de 556, se ve que los números 23, 24, 25 no satisfacen á la tabla II, y si solo el 26, que satisface tambien á la tabla VII en el número 20+6, estas son las raices de la equacion prescindiendo de los signos.

Pero como se ha de tomar en cuenta el coeficiente N de la equacion (B), es claro que las tres raices de ella seran las de la tab IX, y aplicadas al caso presente, será M=556, N=3120, de donde resulta la tabla X.

Y aplicadas á la equacion (A) serán sus tres raices lás espresadas en la tab. XI.

Finalmente sea propuesta la equacion

(A)....$x^3—6x^2+11x—6=0$ tendremos en la equacion (A), A =6,B=11,U=6, y substituyendo estos valores en la tab. XI, resultará la tab. XII, donde ni aun ocurre extraer la raiz gnomonica, por ser en la presente $9AB-2A^3-27U=0$.

Si la estraccion de la raiz cuadrada (y todas las operaciones aritméticas) es geometrica, tambien la estraccion de la raiz gnomonica es operacion geométrica; queda pues reducido el caso irreducible, (prolog. 21) y SE ABRE PASO A LA RESOLUCION DE LAS EQUACIONES DE CUALQUIER GRADO. (prológo 22)

§ V.

RESOLUCION SINTETICA.

Del número 8, de la tab. I resulta la equacion $(a+b)^2-Mab=0$ en ella son constantes los términos $(a+b)^2$, y M: queda solo variable ab, conque $d(a+b)^2=0$, $dM=0$,

$$dab = \frac{a-da}{b+db} - \frac{a}{b} \text{(prolog. N. 15)}$$

Esta es la equacion diferencial que se dió en la cuadratura del círculo, luego debe resolverse del mismo modo.

En efecto todas las raices de las equaciones son las ordenadas de un círculo, es decir todas son raices cuadradas, y por tanto en nuestra resolucion en las tab. IX, X, XI, XII, no hay raices terceras: ni las habria enesimas en la resolucion de una equacion de grado n á no ser qne se vuelva otra vez á los irreducibles: es imposible

RISOLUZIONE DEL CASO IRREDUCIBILE.

§ I.

PRELIMINARI.

Sia proposta l'equazione (A)....$x^3—Ax^2+Bx—U=0$

Abbiasi quella senza secondo termine

(B)....$x^3—Mx\pm N=0$.

La tav. I rappresenta l'analisi de l'equazione (B),

La colonna verticale marcata * contiene le radici de l'equazione (B) nelle sue diverse combinazioni, le colonne verticali M, ed N sono i coefficenti de la equazione (B).

La colonna 4 orizzontale é l'istessa equazione (B) quando $(a+b)$ rappresenta l' unita divisa in n parti.

Le colonne 5 e 6, orizzontali sono ancora diverse divissioni de l'unita.

La colonna 7 orizzontale denota che sempre il coefflcente N é uguale á la meta de la somma de i quadrati delle radici (facendo astrazzione dei segni).

Finalmente le colonne 8, e 9, denotano che M á la figura d'un gnomone dumque bissogna estraere la radice GNOMONICA di M.

La radice gnomonica di M, ovvero di a^2+ab+b^2, è la stessa che la radice quadrata di $(a+b)^2$ è quando una delle variabili a ovvero b è funzione di zero N=0, ma la radice gnomonica è uguale a la radice quadrata, per cio nelle tav. VII è VIII viene indicata in numeri romani.

Quando non si puo estraere la radice gnomonica, s' indica, come si fa nella radice quadrata, ed il suo segno sara ٦.

§ II.

ESTRAERE LA RADICE GNOMONICA DELLE QUANTITÁ LITTERALI.

Con tutto che una equazione di terzo grado sia ridotta alla mancanza del secondo termine ; questo secondo termine realmente esiste, facendo astrazione dei segni, e la metá di esso è una radice.

Nelle tav. II , III , IV , si trovano dei essempi della estrazione della radice gnomonica, ì quali si scuoprono a prima veduta.

Tav. II. La (2) radice gnomonica sara adunque um binomio. Trovero la prima parte prendendo la radice quadrata di a^2, cioe a, Sottrato il suo quadrato a^2 dalla quantita proposta, mi resta $+ab+b^2$. Divido ab per a , il quoziente e $+b$ che scrivo in radice , multiplicando b per tutta la quantita $a+b$, sottraendo il prodotto dal primo avanzo, niente resta , dunque $a+b$ e la radice gnomonica.

Tav. III. il segno * marca il primo avanzo, * * marca il divisore, * * * marca il secondo avanzo.

Tav. IV un' altro esempio dove a, ed b, son elevate á potenze.

§ III.

ESTRAERE LA RADICE GNOMONICA DELLE QUANTITA NUMERICHE.

Le (3) differenze accidentali tra le lettere ed i numeri, nascono dalla confusione che soffrono le cifre quando si riuniscono in un solo numero, con che i quadrati delle parti e i loro prodotti, non posson piu riconoscersi, per cio bisogna ricorrere alle serie, le di cui differenze abbiano un andamento conosciuto.

(2) Brunacci Elem. di Alg è Geom. cap. 7. § 156 parola per parola (palabra por palabra.)
(3) id., id., id.,

Tav. V e la prima delle differenze (4) * la serie, ** le dif. prime, *** le dif. seconde, **** le dif. terze §.

Tav. VI, la seconda delle differenze: questa tav. nasce de le precedente facendovi $a=1$, $x=0$, gli altri segni come nelle tav. precedenti.

La tav. VII e la terza delle differenze applicata al n.° 676. a, ed b, ed $a+b$ sono le radici de l'equazione (B) facendo astrazione dei segni, le altre note come nelle tav. precedenti, M il coefficente di x nella equazion (B).

La tav. VIII como l'anteriore applicata al n ° 2401. Quando a ovvero b, $=0$, allora la radice gnomonica e uguale alla radice quadrata, ed $N=0$ percio e scrita in caratteri romani.

§ IV

RISOLUZIONE.

Sia l'equazione (B) . . . $x^3-556x-3120=0$; estratta la radice quadra di 556, si vede che i numeri 23, 24, 25, non sodisfano á la tavola II, ma sodisfá il 26; ed ancora alla tav. VII nel n.° 20+6, queste dunque sono le radici, astraendo dei segni.

Ma come bisogna avvere riguardo anche al coeficente N de la equazione (B) é chiaro che le tre radici di essa sarano quelle de la tav. IX, ed applicate al presente caso sará $M=556$, $N=3120$, dove nasce la tav X.

Ed applicate á l'equazione (A) sarano le tre radici quelle che si vedono nella tav. XI.

In fine avuta l'equazione (A) . . $x^3-6x^2+11x-6=0$ avremo $A=6$, $B=11$, $U=6$. E sostituendo questi valori nella tav. XI; risultera la tav. XII, dove nemeno é di bisogno l'estraere la radice gnomonica giache $9AB-2A^3-27U=0$.

Si l' estrazione della radice quadra é geometrica, anche quella della radice gnomonica é similmente geometrica. Dunque resta ridotto il caso irreducibile (prolog 21). Dunque SI APRE IL PASSAGIO ALLA RISOLUZIONE D' OGNI EQUAZIONE. (prolog. 22).

(4) Brunacci Corso di Mat. Subl. tom. 1.° cap 1.° § 6.

§ V.

RISOLUZIÓNE SINTETICA.

V tav. I n.° 8: risulta l'equazione; $(a+b)^2 - M - ab = 0$; $a+b$ constante; M constante, ab variabile: Dunque $d(a+b)=0$, $dM=0, dab = \frac{a-da}{b+db} - \frac{a}{b}$, prolog. n.° 15, cioe bisogna ricorrere alla quadratura del circolo.

In fatti ogni radice di qualumque equazione é una ordinata del círcolo, cioe una radice quadra, perloche nelle tavole X, XI, XII, non ve ne sono altre che le seconde potenze.

REDUCTION.

DU CASE IRREDUCTIBLE.

§ 1

PRELIMINAIRE

Soit proposée l'équation A . . . $x^3 - Ax^2 + Bx - U = 0$. soit l'equation sans second terme (B) . . . $x^3 - Mx \pm N = 0$.

La table I presente l'Analyse de l'equation (B).

La colonne vertical marquee * demontre les racines de l'equation B . Les colonnes verticales M et N sont les coefficients de l'equation B . La colonne horizontale 4 est la memme equation B quand $a+b$ represente l' unité divisée en n parts.

Les colonnes 5 et 6 horizontales sont encore diverses divisions de l' unité. La colonne 7 horizontale denote toujours que le coefficient M est egal á la moitié de la some des quarres des racines de l'equation B en faisant abstraction des signes.

Les colonnnes 8 et 9 demontrent que M á la figure geometrique d'un gnomon : il faut donc extraire la racine GNOMONIQUE de M.

La racine gnomonique de M , ou de a^2+ab+b^2 est la memme que la racine carrée de $(a+b)^2$: et quand une des variables a , ou b est fonctiou de zero , $N=0$, mais la racine gnomonique est egale a la racine carrée : par cette raison dans les tables VII , et VIII on l' indique avec des lettres romaines.

Quand on ne peut extraire la racine gnomonique on l' indique , comme l' on fait dans l' extraction de la racine carrée , et leur signe sera ꓶ.

§ II.

DE L'EXTRACTION GNONOMIQUE DES QUANTITES LITTERALES.

Si la second terme manque dans une equation, ce second terme existe veritablement, en faisant abstraction des signes, et la moitié de ce second terme est racine de l'equation (B), les facteurs du dernier terme sont les termes de ce second terme.

Ce la posé, dans les tables II, III, IV, l'on trouvera des exemples, que l'on decouvre a coup d'œil.

Tab. II. (5) Je prends la racine quarrée du premier terme a^2, la quelle est a, que j'ecris a coté de la quantité proposée, Je quarre cette racine, et j'ecris le quarré a^2 sous le premier terme, avec le signe—, pour le retrancher. La reduction faite il reste $ab+b^2$

Sous la racine a je puis ecrire le memme a que j'emploie pour diviser le premier terme ab de la quantite restante $ab+b^2$, je trouve pour quotient $+b$, que j'ecris á la suite de la racine a: mais pour confirmer cette operation, je multiplie le total $(a+b)$ par ce même quotient b, je porte á mesure les produits, sous la quantité $+ab+b^2$, en observant de changer les signes de ces produits faisant ensuite la reduction, il ne reste rien.

---

(5) Bezout. Cours de Mathematiques, prem. sec. § 117. pag. 194. Ed de Paris 1787. Mot pour mot. (palabra por palabra.)

Tab. III, * marque le premier reste * * marque le diviseur * * * marque le second reste.

Tab. IV, autre exemple ou a et b sont elevées a des puissances.

§ III.

DE L'EXTRACTION GNOMONIQUE DES QUANTITÉES NUMERIQUES.

Par ce que les puisances, et les productes de les racines sont joints enssemble il faut avoir resource aux series, dont les differences soyent constantes, et dont la façon d' agir soit connue.

Tab. V est la premiere des differences.

La colonne vertical marquée * de montre les series, la colonne vertical * * les premieres differences: * * * les secondes. * * * * Les troisiemes etc.

La tab. VI est la seconde des diferences: cette table nacquit de la tab. V. en faisant $a=l, x=o$, et demontrent les antepenultiemes differences en progression aritmetique, les penultiemes egales, et les dernieres$=$o.

Les arterisques comme dans les tables precedentes.

Tab. VII, est la troisieme des differences apliquée au numero 676.

Les colonnes verticales a, et b sont les racines de l'equation [B], en faisant abstraction des signes, les asterisques comme dans la table precedente, M le coefficient premier de l'equation [B.]

La table VIII est la derniere des differences apliquée au N.° 2401, comme la precedente.

Quand a ou b, $=$o, alors la racine gnomonique est la memme que la racine carrée, et N$=$o, et par ce la est marquée avec des lettres romaines.

§ IV.

RESOLUTION.

Soit propossée l'equation... [B] .. $a^3—556—3120=$o En faisant extraction de la racine carrée de 556 l'on voit ue los

numeros 23, 24, 25, ne peuvent pas satisfaire á latable II, et seulment le 26 qui satisfait encore á la table VII dans le numero 20+6, ces sont les trois racines de l'equation [B] en faisant abstraction des signes

Mais comme l'on doit prendre egard au coefficient N de l'equation [B], il est claire que les trois racines seront celles de la table IX, et apliquées au cas present, sera M=556, N=3120, ou nacquit la table X.

Et apliquées á l'equation [A] seront les trois racines les exposées dans la table XI.

En fin proposscz l'equation [A]...$x^3-6x^2+11-6=o$, nous avrons dans l'equation [A], A=6, B=1, U=6 faisant la sustitution de ces valeurs, nous avrons la tab. XII,

Si l'operation d'extraire la racine carrée est, geometrique, encore l'extraction de la racine gnomonique est geometrique: alors il vient reduit le cas irreductible. [prolog. 21]

Les imaginaires-reelles du cas irreductible dependent de cette abstraction des signes, et de faire $x=m+n$, etant, $x=a+o$,

Donc

ON ŒVRE LA RESOLUTION des problemes de quelque grade que ces soyent [prolog. 22.]

§ V.

RESOLUTION SYNTETIQUE.

V tab. I N.° 8. il vient l'equation.

$[a+b]^2-M-ab=0$, ou seulement ab est variable: donc

$$d(ab)=\frac{a-da}{b+db}-\frac{a}{b}=0 \text{ (prolog. 15)}$$

Etant ce la l'equation de l' integrale et differentielle de la quadrature du circle, il faut la ressoudre dans la memme maniere.

En effet tontes les racines des equations sont les ordenées du circle c'est a dire que elles sont racines carrées et pour ce la, dans les tables IX, X, XI, XII, n' y a pas d' autres racines que les carrées, et ce la est la memme chose dans les equations superienres

REDUCTION OF IRREDUCIBLE CASE.

§I.

PRELIMINARIES.

Let us be proposed the equation (A)....

$$x^3—Ax^2+Bx—U=0$$

Let be the transformed equation without the second term.

$$(B)...x^3—Mx\pm N=0$$

thetable I shall present the equation's (B) analysis; into the vertical column * are the roots of equation, the verticals columns M, N the equation's (B) coefficients: the horizontal column 4, equation (B) when $a+b$ represents the unity divised in n parts: the columns 5 and 6, are also others divisions of unity; the column 7 horizontal demonstrated that always M is equal to the sum of the root's quadrates divised in two parts equals (abstracting f the signs). the columnos 8 and 9, are to say, that M had a gnomonical figure: it must to extract GNOMONICAL ROOT of M.

Root gnomonical of M, or of (a^2+ab+b^2) is the same that quadrate root of $(a+b)^2$ and when one variable a, or $b=0$, is $N=0$ but his root gnomonical is equal to the quadrate root: by this cause in the tables VII, and VIII are marked whit romans characters.

When cannot to extray the gnomonical root, it must to indicate (in such á maner arrives in the quadrate root) and his signe may be ꞁ.

§ II.

OF EVOLUTION, OR EXTRACTION OF LITERALS GNOMONICALS ROOTS.

In á equation where the second term $=0$, this term in truth exist [abstracting of the signs] and his half is á value of thle variable, that is to say á equation's root, te root guomonica.

Tab. II, III, IV, are the examples.

Tab. II.

[6] Drawing á crooked line on the right hand of your quantity, as in division, find the root of your first single square viz. a and place it in the quotient. Placing the square of the root found, under the first single square, substract, and set down the remainder $+ab+b^2$: divising ab per a the quotient is b, let be b placed into the crooked line wich sign+and substacting it remanes=0.

Tab. III * te first remainder: ** the divisor: *** the second remainder.

Tab. IV another example where a and b are eleved to the potencys.

§ III.

OF THE EXTRACTION OF NUMERICALS GNOMONICALS ROOTS.

As the potencys and products are united, it must to have recours to the series of constants differences and of known process.

Tab. V is the first of the differences. The horizontal column marked * demonstrated the series, ** the firstdiferences *** the seconds differences, and so hereafter.

Tab. VI is the second of the diferences. Takes his origin of the antecedent table, making $a=1$, $x=0$ and demostrated the aritmetical progression: the penults differences are equals: the last=0: the markes *, **, as in the antecedents.

The tab. VIII is the third of the differences applyed to the number 676: a and b, and $a+b$ are the equation's (B) roots (abstracting of the signs), the litle stars, or asterisks, or marks* as in precedents tab. M the first coefficient of equation (B).

Tab. VIII is the precedent table aplyed to the number 2401 when a, or $b=0$, then gnonomical root is the same that quadrate root, and so is marked in romans characters.

§ IV.

RESOLUTION.

Let be the transformed equation without the second term (B)...x^3—$556x$—3120=0.

Extracting the quadrate root of 556 may be seen that the numbers 23, 24, 25, satisfy not to the table II, and only the number 26, that is well accomodated to the table VII in the column. (20+6), that are the three roots of equation (abstracting of the signs.)

But it must to considerate also equation's (B) coefficient N, and the three roots shall be into the table IX, and aply'd to the present number 556, as in table X, that is to say M=556' N= 3120, and then takes his origin the tab. X, that aply'd to equation (A) are the three rots exposed into the table XI.

To final receipt let be proposed the equation (A).... x^3—$6x^2$ +$11x$—6=0: shall be A=6, B=11, U=6, and substituting this values in the tab. XI, we shall have the tab. XII, where it must not to exctract the gnomonical root into the present case, by cause, 9AB—2A^3—27U=0.

If the operation of extracting quadrate root is geometrical, likewise operation of extracting gnomonical root is also geometrical, and then the irreducible case is reduced. (prolog. 21)

The imaginary–reals root of the irreducible case depends of this abstraction of signs, and of to make x=m+n, being x=a+0. And IS OPEN THE RESOLUTION OF ALL DE GREES, (prolog. 22).

§ V

SYNTHETICAL RESOLUTION.

Tab. I column 8, equation $(a+b)^2$—M—ab=0:
$(a+b)$ constant· M constant: only ab variable:

(6) Webster. pag. 212 word for word (palabrapor palabra.

then

$$d(a+b)^2=0,\ dM=0,$$

$$d(ab)=\frac{a-da}{b+db}-\frac{a}{b}\quad \text{(prólog. 15)}.$$

Then

Deppends of the circle's quadrature: all equations roots ar- the ordinates of the circle, that is to say, all are quadrate roc ots, and then in the presents tables are not thirds roots, nor superiors to second degree.

ERRATAS.

PAGINA.	LINEA.	DICE.	DEBE DECIR.
1	10	solœccismis	solœcismi
1	13	Cardanun	Cardanum
2	8	multics	multifaric
2	27	Paralellograma	Parallelograma
2	32	quadratibus	quadratis
3	10	cs	est
3	22	d (xy)	(xy): ó bien S. d (xy)
3	24	figura	figurœ
3	27	$\sqrt{M-\frac{3M}{7M}}$	$\sqrt{M-\frac{3N}{7M}}$
4	1	quantundis	quamtumvis
4	6	$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$	$\frac{7(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{\sqrt{3}}$
4	19	secuudo	secundo
4	24	secunndus	secundus
5	5	multics	crebro
5	20	duo	duœ
5	23	esentiale	essentiale
6	1	superior	superius.

PAGINA.	LINEA.	DICE.	DEBE DECIR.
6	2	inferior	inferius
6	8	secumdum	secundum
6	20	quibus	quos
6	9	aut	et
6	34	excusac	excussœ
10	3	PROLOGOMEMA	PROLOGOMENA
10	18	radicen	radicem
9	22	recurrendeum	recurrendum
11	2	critur	oritur
11	3	demoustrat	demonstrat
11	5	ultima	ultimas
12	2	Ergo (prolog. 21)	(prolog. 21) Ergo
12	23	Bv	Bx
13	27	Seria	es
16	9	RISOLUZIONE	RIDUZIONE
16	29	é	e
17	10	um	un
17	16	e	é
18	3	de le	de la
18	10	como	come
18	30	si	se
20	16	la	le
21	17	l	1
21	34	556	556 x
21	35	uelas	que les
22	11	11	11 x
22	30	tontes	toutes
23	15	f....columnos	of....columus
25	14	rots	roots
23	pen.	thle	the
23	ult.	te...gnomonica	the...gnomonical
25	8	cf	of
25	24	root	roots
26	4	ar	are
26	5	roeots	roots

Tab .I. col. hor: 4. $z^2 - Mz + N = o$

Tab. I. col. hor: 5. in tertio term. $+ \frac{b}{n}$

Tab. IV. col. hor: 2: superest illud 2

Tab. IV. col. hor: 3
in primo termino de est exponensu in secundo termino superest exponensn

Tab. V. functiones x cum incrementulis pusillum dextrorsumque progredientes

Tab. VIII. in capite 2·401

Tab. X. col: hor: III $\frac{3960}{26}$, corr: $\frac{9360}{26}$

Tab: XII.
in radice prima: 9 6^2 deest punctum signum multiplicationis 9 $6^2 =$

I.

1	*	M	N
2	$-a$ $-b$ $+(a+b)$	$-(a+b)\ (a+b)$ $+a\ b$	$+ab\ (a+b)$
3	$+a$ $+b$ $-(a+b)$	$-(a+b)\ (a+b)$ $+ab$	$-ab\ (a+b)$
4	$Z^2 - MZ + N = 0$		
5	$\left\{ a - \frac{b}{n} \right\} + \left\{ \frac{b}{n} \right\}$		
6	$\left\{ a - \frac{b}{\sqrt{n}} \right\} + \left\{ \frac{b}{\sqrt{n}} \right\}$		
7	$M = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$		
8	$M = (a+b)^2 - ab$		
9	$M = a^2 + ab + b^2$		

II.

$a^2 + ab + b^2 \mid a + b$ $-a^2$ $+ab + b^2$ $-ab - b^2$ 0	$507 \mid 13 + 13$ $-169 \qquad 169$ $169 = 13.13$ $+338 = 338$ -338 0
$556 \mid 20 + 6$ $-400 \qquad 36$ $120 = 6.20$ $+156 = 156$ -156 0	

III.

$$a^4 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^3 + b^2c^3 + c^6 \quad \big|\ a^2 - b^2 - c^3$$

$$-a^4$$

* . . . . $- a^2b^2 + b^4$

* * a^2, ... $+ a^2b^2 - b^4$

* * * . . . . $- a^2c^3 + b^2c^3 + c^6$

$$+ a^2c^3 - b^2c^3 - c^6$$

$$0$$

IV.

$$m^{2r}n^{2s} + m^rn^sp^tq^u + p^{2t}q^{2u} \quad \big|\ m^rn^s + p^tq^u$$

$$-m^{2r}n^{2s} \qquad 2$$

$$+ m^rn^sp^tq + {}^np^{2t}q^{2u}$$

$$- m^rn^sp^tq^u - p^{2t}q^{2u}$$

$$0$$

V.

*	$\frac{y}{x}$,	$\frac{y}{x+a}$,	$\frac{y}{x+2a}$,	$\frac{y}{x+3a}$,	$\frac{y}{x+4a}$,
* *	$\frac{dy}{x}$,	$\frac{dy}{x+a}$,	$\frac{dy}{x+2a}$,	$\frac{dy}{x+3a}$,	
* * *	$\frac{d^2y}{x}$,	$\frac{d^2y}{x+a}$,	$\frac{d^2y}{x+2a}$,		
* * * *	$\frac{d^3y}{x}$,	$\frac{d^3y}{x+a}$,			
* * * * *	$\frac{d^4y}{x}$,				
	etc.	etc.		etc.	etc.

VI.

*	y_0,	y_1,	y_2,	y_3,	y_4,	y_5,
**	dy_0,	dy_1,	dy_2,	dy_3,	dy_4,	
***	d^2y_0,	d^2y_1,	d^2y_2,	d^2y_3,		
****	d^3y_0,	d^3y_1,	d^3y_2,			
*****	d^4y_0,	d^4y_1,				
****** . . . etc. . . . . etc.	d^5y_0	etc. . . . etc.				

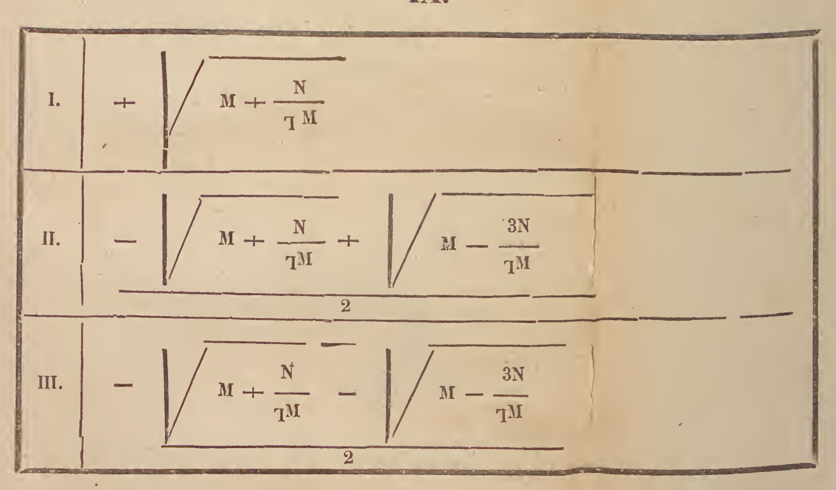
VII
676

I	a+b	ab	*	**	***	M	*	**	***
II	26+0	0				DCLXXVI			
III	25+1	25				561	XXV	II	
IV	24+2	48	23	2		628	23	2	0
V	23+3	69	21	2	0	607	21	2	0
VI	22+4	88	19	2	0	588	19	2	0
VII	21+5	105	17	2	0	571	17	2	0
VIII	20+6	120	15	2	0	556	15	2	0
IX	19+7	133	13	2	0	543	13	2	0
X	18+8	144	11	2	0	532	11	2	0
XI	17+9	153	9	2	0	523	9	2	0
XII	16+10	160	7	2	0	516	7	2	0
XIII	15+11	165	5	2	0	511	5	2	0
XIV	14+12	168	3	2	0	508	3	2	0
XV	13+13	169	1			507	1		
XVI	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

VIII.
2041

I	a + b	a b	M	*	* *	* * *
II	49 + 0	0	MMCCCCI			
III	48 + 1	48	2353	XLVIII	II	0
IV	47 + 2	94	2307	46	2	0
V	46 + 3	138	2263	44	2	0
VI	45 + 4	180	2321	42	2	0
VII	44 + 5	220	2281	40	2	0
VIII	43 + 6	258	2143	38	2	0
IX	42 + 7	294	2107	36	2	0
X	41 + 8	328	2073	34	2	0
XI	40 + 9	360	2041	32	2	0
XII	39 + 10	390	2011	30	2	0
XIII	38 + 11	418	1983	28	2	0
XIV	37 + 12	444	1957	26	2	0
XV	36 + 13	468	1933	24	2	0
XVI	35 + 14	490	1911	22	2	0
XVII	34 + 15	510	1891	20	2	0
XVIII	33 + 16	528	1873	18	2	0
XIX	32 + 17	544	1857	16	2	0
XX	31 + 18	558	1843	14	2	0
XXI	30 + 19	570	1831	12	2	0
XXII	29 + 20	580	1821	10	2	0
XXIII	28 + 21	588	1813	8	2	0
XXIV	27 + 22	594	1807	6	2	0
XXV	26 + 23	598	1803	4	2	
XXVI	25 + 24	600	1801	2		
etc.	etc.	etc.	etc.			

IX.



X.

I.	$+\sqrt{556+\frac{3120}{26}} = \sqrt{676} =$	$+ 26$
II.	$-\frac{\sqrt{556+\frac{3120}{26}} - \sqrt{556-\frac{9360}{26}}}{2} = \frac{-\sqrt{676}-\sqrt{196}}{2} =$	$- 20$
III.	$-\frac{\sqrt{556+\frac{3120}{26}} + \sqrt{556+\frac{3960}{26}}}{2} = \frac{-\sqrt{676}+\sqrt{196}}{2} =$	$- 6$

I. $$\frac{A}{3}+\sqrt{-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)\pm\frac{(9AB-2A^3-27U)}{27\mathrm{T}-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)}}$$

II. $$\frac{A}{3}-\frac{\sqrt{-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)\pm\left(\frac{(9AB-2A^3-27U)}{27\mathrm{T}-\left\{\frac{27B-9A^2}{27}\right\}}\right)}+\sqrt{-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)\mp\left(\frac{3\,(9AB-2A^3-27U)}{27\mathrm{T}-\left\{\frac{27B-9A^2}{27}\right\}}\right)}}{2}$$

III. $$\frac{A}{3}-\frac{\sqrt{-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)\pm\left(\frac{(9AB-2A^3-27U)}{27\mathrm{T}-\left\{\frac{27B-9A^2}{27}\right\}}\right)}-\sqrt{-\left(\frac{27B-9A^2}{27}\right)\mp\left(\frac{3\,(9AB-2A^3-27U)}{27\mathrm{T}-\left\{\frac{27B-9A^2}{27}\right\}}\right)}}{2}$$

XII.

I.		$\frac{6}{3} + \sqrt{-\frac{27\cdot11-9\cdot6^2}{27} + \left(\frac{9\cdot6\cdot11-2\cdot6^3-27\cdot6}{27^{1}-\left(\frac{27\cdot11-9\cdot6^2}{27}\right)}\right)} =$ $\frac{6}{3} + \sqrt{-\left(\frac{297-324}{27}\right) + \left(\frac{594-432-162}{27^{1}-\left(\frac{27\cdot11-9\cdot6^2}{27}\right)}\right)} =$ $\frac{6}{3} + \sqrt{\frac{27}{27} + 0} = 3$
II.	. . . . . . 2 — 0 = 2	$\frac{6}{3} - \frac{\sqrt{\frac{27}{27}+0}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{27}{27}+0}}{2}$
III.	. . . . . . 2 — 1 = 1	$\frac{6}{3} - \frac{\sqrt{\frac{27}{27}+0}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{27}{27}+0}}{2}$